

Kapitel 2: MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

Inhalt:

EINFÜHRUNG.....	11
ZAHLEN UND EXPONENTEN	11
FOLGEN UND REIHEN.....	11
EXPONENTEN UND LOGARITHMEN.....	12
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	14
DARSTELLUNG VON DATEN UND FUNKTIONEN	21
GRÖßEN UND EINHEITEN.....	31
LITERATUR	33
LINKS	33

Einführung

Die Formelschreibweise von naturwissenschaftlich-mathematischen Vorgängen ist die einzige international einheitliche Informationsübertragung. Diese Formeln werden in deutschsprachigen Werken ebenso dargestellt wie in englisch- oder französischsprachigen, die ja immerhin noch die gleichen Buchstaben benutzen. Aber auch in Sprachen mit vollständig anderen Zeichen, wie chinesisch, japanisch oder arabisch werden mathematische Formeln nach den gleichen Regeln dargestellt.

Zahlen und Exponenten

Unser Zahlensystem arbeitet mit der Basis 10, daher der Name Dezimal-System. Dies hat den Vorteil, dass man sich manches an den Fingern abzählen kann. Das 12er-System wäre vorteilhafter, denn es hat mehr glatte Teiler, wie man leicht ausprobieren kann. Das 2er-System (Dual-System) findet hauptsächlich im Computer Anwendung. Die Richtigkeit einer Aussage hängt nicht von dem Zahlensystem ab, das dafür benutzt wird (Biologen sollten wissen, dass Mäuse im 8er-System rechnen, denn sie haben nur 8 Finger).

Folgen und Reihen

Bei der arithmetischen Folge ist die **Differenz** aufeinander folgender Zahlen konstant:

$$\begin{aligned}3 - 2 &= 1 \\7 - 6 &= 1\end{aligned}$$

Bei der geometrischen Folge ist der **Quotient** aufeinander folgender Zahlen konstant:

$$\begin{aligned} 16/8 &= 2 \\ 256/128 &= 2 \end{aligned}$$

Tabelle 1: Arithmetische, geometrische und exponentielle Reihen

Arithmetisch	Geometrisch	Exponentiell
0	1	2^0
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4
5	32	2^5
6	64	2^6
7	128	2^7
8	256	2^8
9	512	2^9

Wie man aus der Tabelle ersieht kann man die Multiplikation von Zahlen auf den vergleichsweise einfachen Vorgang des *Addierens* zurückführen, indem man die Exponenten einer Exponentialfolge addiert und den entsprechenden Wert aus der geometrischen Folge abliest. Damit haben wir den Schritt zum *Logarithmieren* getan. Diese Art des Rechnens wurde vor Verbreitung digitaler Rechenmaschinen z.B. mit Rechenschiebern oder mit Hilfe von Logarithmentabellen durchgeführt.

Exponenten und Logarithmen

Die geometrische Folge ist ein Spezialfall der sog. [Exponentialfunktion](#) $y = a^x$ für ganzzahlige *Exponenten* x wobei sich die *Mantisse* a durch den konstanten Quotienten der Folge ergibt und der *Exponent* x durch die Anzahl der Multiplikationsschritte also die Position innerhalb der Folge.

Die Umkehrung der Exponentialfunktion ist der *Logarithmus* also:

$$\begin{aligned} B^n &= N && \rightarrow && \log_B N &= n \\ 2^n &= N && \rightarrow && \log_2 N &= n \\ 2^4 &= 16 && \rightarrow && \log_2 16 &= 4 \\ 10^2 &= 100 && \rightarrow && \log_{10} 100 &= 2 \end{aligned}$$

Rechenregeln mit Logarithmen:

$$\begin{aligned}\log_{10} &= \lg \\ \log_e &= \ln \\ \log(xy) &= \log x + \log y \\ \log \frac{x}{y} &= \log x - \log y \\ \log x^n &= n \log x\end{aligned}$$

Ein Beispiel für die Anwendung des dekadischen Logarithmus: **pH-Wert, Hörschwelle.**

pH-Wert

Der pH-Wert ist definiert als der negative dekadische Logarithmus der Wasserstoffionen-Konzentration $[H^+]$ einer wässrigen Lösung:

$$\text{pH} = -\lg[H^+] = \lg \frac{1}{[H^+]}$$

Für reines Wasser gilt: $[H^+] = 10^{-7}$ mol, d.h.:

$$\begin{aligned}\text{pH } 7 &\rightarrow 10^{-7} \text{ mol} &&= 6,02205 \times 10^{16} \text{ Moleküle } H_3O^+/\text{Liter} \\ \text{pH } 7,2 &\rightarrow 6,02205 \times 10^{23} \times 10^{-7,2} \text{ mol} &&= 6,02205 \times 10^{15} \times 10^{0,8} \\ &&&= 6,02205 \times 6,309573 \times 10^{15} \\ &&&= 3,8 \times 10^{16} \text{ Moleküle } H_3O^+/\text{Liter}\end{aligned}$$

Die Hörschwelle

Ein physiologischer Vorgang wie das Hören (20 Hz - 20 kHz) umfasst nicht nur ein breites Spektrum von Frequenzen, sondern auch einen großen Intensitätsbereich, der daher mit einer logarithmischen Skala angegeben wird. Die Schalldruckamplituden, die gerade noch eine Hörempfindung auslösen, sind zwischen 1 kHz und 5 kHz besonders gering. So liegt die Hörschwelle

für 1 kHz bei einer Schalldruckamplitude von etwa $3,2 \times 10^{-5}$ Pa

für 20 Hz bei einer Schalldruckamplitude von etwa 10^{-1} Pa

Es hat sich daher als vorteilhaft erwiesen, die Hörfähigkeit nicht in Absolutwerten der Schalldruckamplituden anzugeben, sondern auf den entsprechenden Grenzwert der Hörfähigkeit (p_0) bei 1 kHz zu normieren. Es wird also das Verhältnis zweier zu

vergleichender Schalldruckamplituden gebildet. Da dies jedoch zu sehr großen Zahlen führt, gibt man den mit 2 multiplizierten Logarithmus dieses Wertes als so genannten Schalldruckpegel β an.

$$\beta = 2 \lg \frac{p}{p_0} \quad (\text{Bel})$$

Der Schalldruckpegel ist eine dimensionslose Größe, *Bel* ist also keine Einheit, sondern nur ein Hinweiswort! Meist wird *DeziBel* angegeben, d.h. der Zahlenwert wird mit 10 multipliziert:

$$\beta = 20 \lg \frac{p}{p_0} \quad (\text{dB})$$

Als Hörgrenze ist 0 dB festgelegt, da $p = p_0$.

Ein Ton oder ein Klang werden subjektiv empfunden. Mit dem Begriff der Lautstärke wird versucht, ihre Stärke zu quantifizieren. Dazu wird die Schalldruckamplitude eines Vergleichstons (p_v) von 1 kHz solange erhöht, bis beide Töne gleich laut empfunden werden. Damit kann wieder auf den Grenzwert der Hörfähigkeit (p_0) bezogen werden.

$$\text{Lautstärke} = 20 \lg \frac{p_v}{p_0} \quad (\text{Phon})$$

Phon ist wie *Bel* ein Hinweiswort, eine dimensionslose Größe.

Ein 1 kHz-Ton von 50 Phon mit Schalldruckamplitude 10^2 Pa wird als ebenso laut empfunden wie ein 50 Hz-Ton mit 10^{-1} Pa. Eine Unterhaltung liegt bei etwa 40 bis 80 Phon, je nach dem Hintergrundrauschen. Ein Rockkonzert erreicht bis zu 120 Phon und kommt damit der Schmerzgrenze sehr nahe.

Tabelle 2

p/p_0			Phon
100	=	$10^2 \rightarrow 2 \times 20$	= 40
1000	=	$10^3 \rightarrow 3 \times 20$	= 60
1000000	=	$10^6 \rightarrow 6 \times 20$	= 120

Differentialgleichungen

In der Biologie finden wir sehr häufig Probleme, bei denen nur die *Änderung* einer bestimmten Größe z.B. über die Zeit vorher bekannt ist. D.h. statt der Gleichung für eine einfache Funktion

$$y(x) = a x$$

haben wir nun eine Gleichung der Form

$$dy(x) = a dx$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = a$$

Dabei symbolisiert der Ausdruck $\frac{dy(x)}{dx}$ die Änderung der abhängigen Größe y relativ zur unabhängigen Größe x . Solche Ausdrücke nennt man Differentiale oder Ableitungen einer Funktion; Gleichungen, die Differentiale enthalten werden folglich Differentialgleichungen genannt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Enthalten die Differentialgleichungen nur einfache Differentiale, d.h. wird nur nach **einer** unabhängigen Größe abgeleitet nennt man sie gewöhnliche Differentialgleichungen. z.B.:

$$\frac{dy(x)}{dx} = a y(x)$$

$$y' = a y$$

ein wichtiges Beispiel für eine gewöhnliche Differentialgleichung ist die [Ratengleichung](#).

Partialdifferentialgleichungen

Häufig hängt die abhängige Größe aber von mehreren unabhängigen Größen ab (z.B. den drei Raumrichtungen...) man spricht dann von partiellen Differentialen $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ und entsprechend von Partialdifferentialgleichungen z.B.:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$$

Ein Beispiel für eine Partialdifferentialgleichung ist z.B. das 2. Ficksche Gesetz für eindimensionale Diffusion

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Die Ratengleichung

In der Chemie und Biologie tritt besonders häufig die sog. Ratengleichung auf:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \lambda y(x)$$

d.h. die Zu- oder Abnahme eines Stoffes oder einer Population hängt über eine Konstante λ von der bestehenden Stoffmenge bzw. Populationsgröße ab. Wenn wir die unabhängige Größe x durch die Zeit t ersetzen, dann erhält λ die Einheit 1/s d.h. es handelt sich um eine Änderungsrate oder Ratenkonstante. Ihr Kehrwert $\tau = 1/\lambda$ wird auch oft als Zeitkonstante z.B. einer chemischen Reaktion bezeichnet.

Für deren Anwendung und Lösung dieser Differentialgleichung (Biologenintegral) wollen wir hier einige Beispiele geben:

Die Wachstumsgleichung

Bakterien vermehren sich unter optimalen Wachstumsverhältnissen sehr rasch: etwa alle 20 min. teilt sich dann ein Bakterium. Wie viele Bakterien (dN) kommen dann pro Zeiteinheit (dt) zu den bereits vorhandenen ($N(t)$) hinzu? Dies hängt von der Verdoppelungszeit ab, die in einem Proportionalitätsfaktor (μ) enthalten ist. Mathematisch ausgedrückt:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mu N(t)$$

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = \mu dt$$

Integration:

$$\ln N(t) = \mu t + const$$

Dies ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung, die aber aufgrund der unbekanntenen Konstanten noch unbestimmt ist.

Zur vollständigen Lösung einer Differentialgleichung benötigt man immer sog. Randbedingungen. In diesem Falle benötigen wir eine Anfangsbedingung d.h.

zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Zahl der Bakterien:

$$N(t) = N_0$$

Was für die Konstante bedeutet:

$$\text{const} = \ln N_0$$

Damit ergibt sich:

$$\ln N(t) - \ln N_0 = \mu t$$

oder

$$\ln \frac{N(t)}{N_0} = \mu t$$

oder

$$N(t) = N_0 e^{\mu t}$$

Die Bedeutung der Konstanten μ ergibt sich aus einer zweiten Randbedingung:

Zum Zeitpunkt $t = t_d$ habe sich die Ausgangszahl der Bakterien verdoppelt, d.h.

$$N(t) = 2 N_0$$

Damit ergibt sich für die Konstante μ :

$$2 N_0 = N_0 e^{\mu t_d}$$

$$\ln 2 = \mu t_d$$

oder

$$\mu = \frac{\ln 2}{t_d}$$

Die vollständige Wachstumsgleichung lautet somit:

$$N(t) = N_0 e^{\frac{\ln 2}{t_d} t}$$

Plausibilitätsbetrachtung: im Exponenten darf keine Einheit stehen. Die Einheit der Zeit steht im Zähler und im Nenner, kürzt sich also heraus.

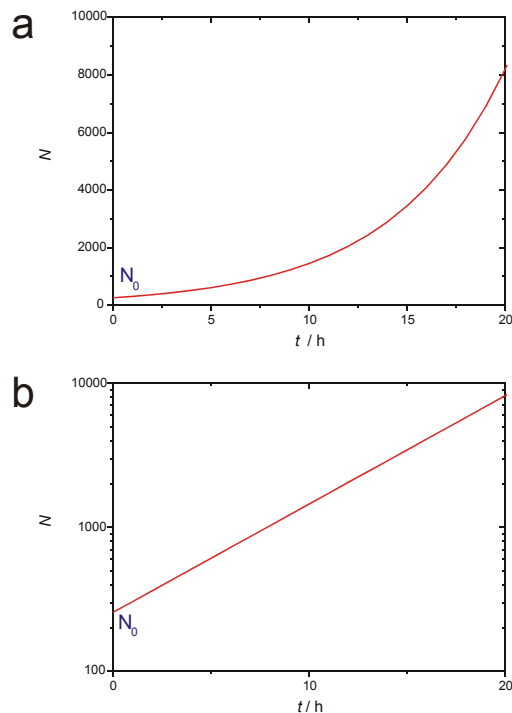


Abb. 6 Wachstumskurve in a) linearer und b) halblogarithmischer Darstellung.

Radioaktiver Zerfall

Der radioaktive Zerfall ist ein typisches Beispiel für eine Kinetik 1. Ordnung. Die Zerfallsgeschwindigkeit $\frac{dc}{dt}$ hängt dabei nur von der noch vorhandenen Konzentration $c(t)$ an Radionuklid und seiner (konstanten) Zerfallsrate k ab:

$$\frac{dc(t)}{dt} = -k c(t)$$

analog zur Wachstumsgleichung erhalten wir durch Integration nach dt wieder die allgemeine Lösung

$$\ln c(t) = -k t + \text{const}$$

und mit der Anfangsbedingung für $t=0$ wird $\text{const} = \ln c_0$

und für $t = t_{1/2}$ (Halbwertszeit) wird

$$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

Die vollständige Zerfallsgleichung lautet daher

$$c(t) = c_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}} t}$$

Abbildung siehe Zerfallskurve Seite 26.

Kinetik zweiter Ordnung — Renaturierung von DNA Fragmenten

Doppelsträngige DNA wird durch Erhitzen auf 90 – 100° C zu verknäulten Einzelsträngen denaturiert. Dies geschieht bei der sog. Schmelztemperatur T_m . Wird diese Lösung in richtigem Puffer und bei richtiger Salzkonzentration langsam abgekühlt, dann finden komplementäre Sequenzen wieder zueinander (Renaturierung). Diese Eigenschaft der DNA wird u.A. bei der sog. Southern-Hybridisierung oder bei der Polymerase-Kettenreaktion (PCR = *polymerase chain reaction*) ausgenutzt.

Die Geschwindigkeit der Renaturierung (Reaktionsgeschwindigkeit) ergibt sich aus der Abnahme der Konzentration der Einzelstränge (c) und einer Reaktionskonstanten (Renaturierungskonstante k).

$$\frac{dc(t)}{dt} = -k c(t)^2$$

Da sich immer zwei DNA Stücke finden müssen, hängt diese Reaktionsgeschwindigkeit von c^2 ab, es handelt sich um eine Kinetik *zweiter* Ordnung. Umformung der Gleichung ergibt:

$$\frac{dc(t)}{c(t)^2} = -k dt$$

Integriert nach der Regel: $\int x^n = \frac{1}{1+n} x^{n+1}$

$$\int c(t)^{-2} dc(t) = -k \int dt$$

$$-\frac{1}{c(t)} = -k t + const$$

1. Randbedingung: $t = 0 \rightarrow c(t) = c_0$

$$-\frac{1}{c_0} = -const$$

eingesetzt erhält man dann:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c(t)} + \frac{1}{c_0} &= -k t & | \quad -c_0 \\ \frac{c_0}{c(t)} - 1 &= k t c_0 \\ \frac{c(t)}{c_0} &= \frac{1}{1 + k c_0 t} \end{aligned}$$

$c_0 t$ wird auch KOT-Wert genannt.

2. Randbedingung: $t = t_{1/2} \rightarrow c(t) = \frac{1}{2} c_0$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + k c_0 t_{1/2}}$$

$$1 = k c_0 t_{1/2}$$

$$k = \frac{1}{c_0 t_{1/2}}$$

Vollständig lautet die Lösung also:

$$\frac{c(t)}{c_0} = \frac{1}{1 + \frac{t}{t_{1/2}}}$$

Die Renaturierungskonstante k ist also dem Produkt aus Ausgangskonzentration und Zeit bis zu 50%-iger Renaturierung der Einzelstränge umgekehrt proportional.

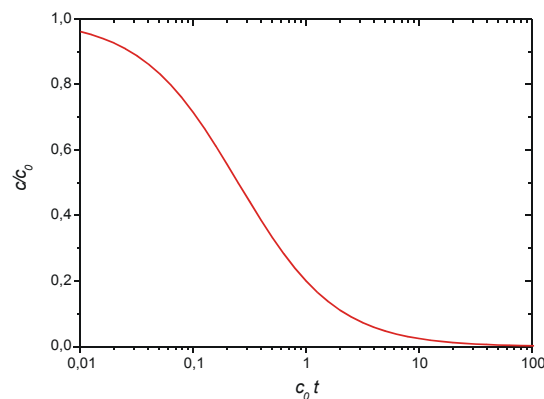


Abb. 7 Renaturierungskinetik von DNA. $k = 0,25$

$\text{M}^{-1} \text{s}^{-1}$ für *E. coli* DNA bei 60°C ; M: Molarität der Basenpaare

Aus diesem sog. c_0t -Plot kann man den Anteil einsträngiger DNA zu jedem beliebigen Versuchszeitpunkt entnehmen.

Darstellung von Daten und Funktionen

In den experimentellen Naturwissenschaften (also auch der Biologie) müssen wir oft Messergebnisse so darstellen, dass ein gegenseitiger funktioneller Zusammenhang deutlich wird. Hierzu haben sich vor allem zwei Formen bewährt, die Darstellung in Tabellenform und die graphische Darstellung in Form von Diagrammen.

Tabellarische Darstellung

Tabellen sollten bevorzugt werden, wenn die Zahlenwerte exakt dargestellt werden müssen und man keine Trends in den Daten aufzeigen möchte z.B.:

Tabelle 3: Beispieltabelle mit Überschrift: Leitwerte einiger HeLa-Klone

unabhängige Größe:	abhängige Größe:	normierte abhängige Größe:
Zellklon	Leitwert G (nS)	Leitwert G'
Klon B	70	1,00
Klon G	66	0,94
Klon K	65	0,93
Klon O	25	0,36

Unterschrift mit Anmerkungen; z.B.

G' wurde auf den Maximalwert G_{\max} normiert

oder:

$$G' = G / G_{\max}$$

Diagramme

Diagramme sind graphische Darstellungen von Daten in einem Koordinatensystem. Sie werden vor allem dann verwendet, wenn man Daten vergleichen will oder (funktionale) Trends in einer Datenreihe aufzeigen will.

Balkendiagramme

Die in **Tabelle 3** gezeigten Werte ließen sich zum besseren Vergleichen in einem Balkendiagramm darstellen:

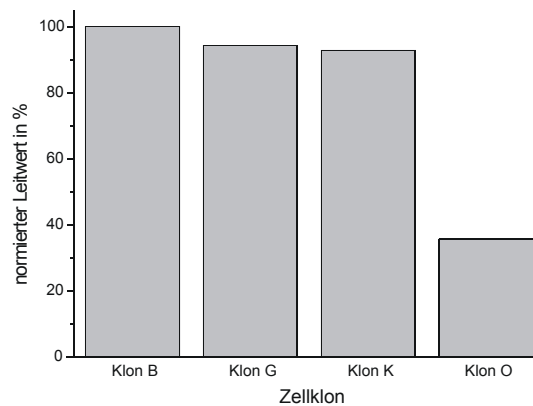


Abb. 8 Beispiel für ein Balkendiagramm.

Um Vergleiche noch weiter zu vereinfachen werden solche Daten häufig normiert; d.h. auf einen Standard- oder Maximalwert bezogen indem man die Werte durch diesen Standardwert teilt. Dies ist auch in der rechten Spalte von **Tabelle 3** gezeigt. Wie man sowohl in der Tabelle als auch in der Abbildung sieht, geht durch die Normierung die Einheit der normierten Größe verloren ([siehe auch Größen und Einheiten](#)). Auch die oft gebrauchte Darstellung von Prozentwerten ist eine Normierung, wobei das %-Zeichen nur ein Hinweiszeichen aber keine Einheit darstellt!

Linien- und Punktediagramme

Häufig will man jedoch Date auch so abtragen, dass zwischen den einzelnen Punkten ein bestimmter Funktionszusammenhang klar wird. Hierzu verwendet man Diagramme, bei denen die Datenpunkte in ein Koordinatensystem eingetragen werden und ggf. durch eine Linie verbunden werden. Die häufigste Form von Koordinatensystemen ist dabei das rechtwinklige oder karthesische Koordinatensystem mit zwei bzw. drei Achsen entsprechend unseren Raumkoordinaten.

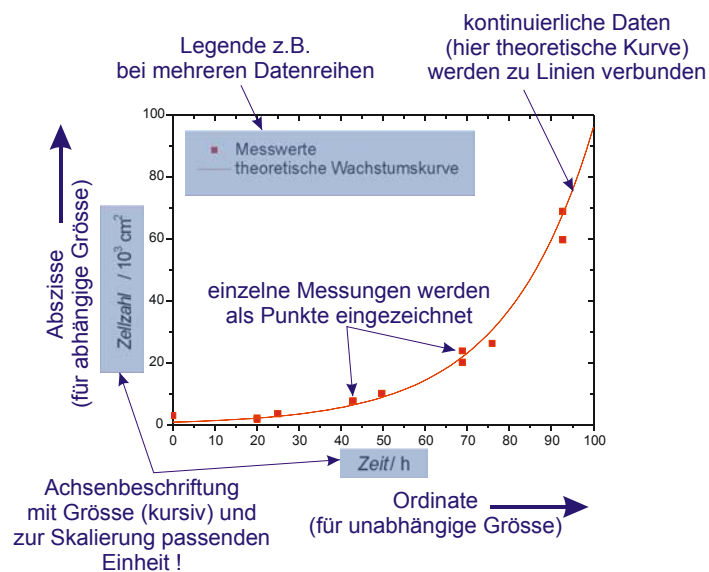


Abb. 9 Beispiel für ein Punkte- und Liniendiagramm. Wachstumskurve einer humanen Zellkultur (HeLa-Zellen).

Dabei ist auf die richtige Beschriftung der Achsen zu achten insbesondere dann, wenn konstante Zahlenfaktoren heraus genommen werden z.B.:

Zellzahl	Zellzahl / 10 ⁶
1×10^6	1
2×10^6	2
4×10^6	4

Häufig verwendet man bei diesen karthesischen Koordinatensystemen noch sog. *Koordinatentransformationen*, bei denen die Werte entlang einer oder beider Achsen nicht mehr linear abgetragen werden, sondern z.B. logarithmisch.

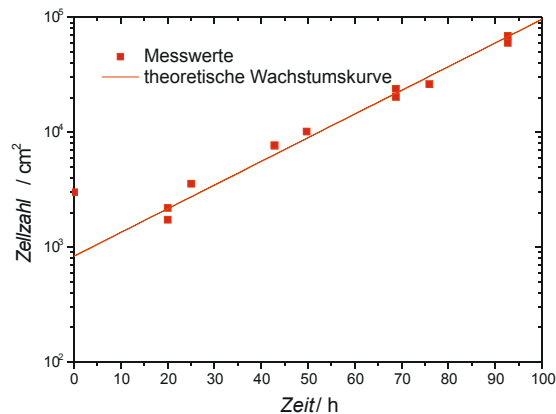


Abb. 10 HeLa-Wachstumskurve in halblogarithmischer Abtragung.

Darstellung einiger häufig vorkommender Funktionen

Im Folgenden geben wir einige Diagramme mit den Darstellungen von in der Biologie häufig vorkommenden Funktionen

Die Gerade

Die einfachste Funktion stellt eine Geradengleichung dar:

$$y = a x + b$$

Sie enthält eine abhängige (y) und eine unabhängige (x) Variable, außerdem noch zwei konstante Faktoren. Die Darstellung einer solchen linearen Beziehung ist problemlos und erlaubt das Ablesen der konstanten Faktoren, beispielsweise als Achsenabschnitt b und als Steigung a .

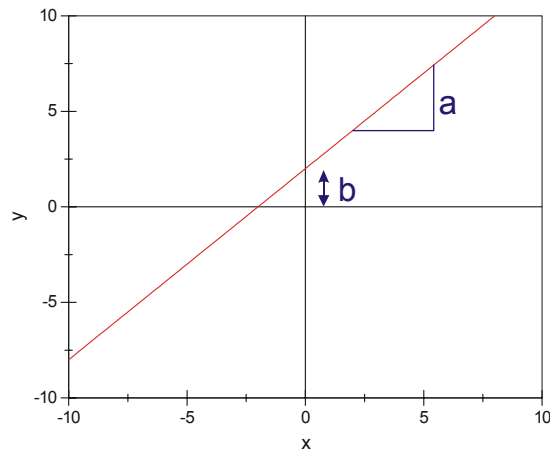


Abb. 11 Funktionsgraph einer Geraden.

Es ist daher vorteilhaft, auch Gleichungen höherer Ordnung durch geeignete Wahl der Koordinaten linear darzustellen und die gesuchten Faktoren aus Schnittpunkten mit den Achsen des Koordinatensystems oder der Steigung zu ermitteln.

Die Parabel

$$y = ax^2 + b$$

ist eine Gleichung 2. Ordnung und stellt eine Parabel dar. Wird y gegen x^2 aufgetragen, dann ergibt dies eine Gerade mit dem Achsenabschnitt b .

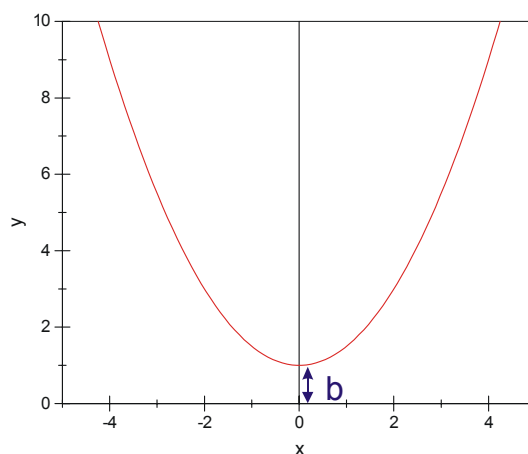


Abb. 12 Funktionsgraph einer Parabel.

Die Reihe von Gerade und Parabel lässt sich weiter fortsetzen nach:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

man spricht dann von einem Polynom n ten Grades, wobei n für die höchste Potenz steht, in die die unabhängige Größe x erhoben wird. Polynome sind wichtig für die *Interpolation* von Zwischenwerten bei Messkurven.

Exponentielles Wachstum und Zerfall

Der Exponentialfunktion begegnen wir in der Biologie häufig in ihren beiden Ausprägungen als exponentielles Wachstum (mit positivem Exponenten)

$$y = a e^{bx}$$

oder exponentiellem Zerfall (mit negativem Exponenten)

$$y = a e^{-bx}$$

z.B. radioaktiver Zerfall (s. Ratengleichung) dabei ergibt sich der Zeitverlauf der Konzentration von Radionuklid aus:

$$c = c_0 e^{-kt}$$

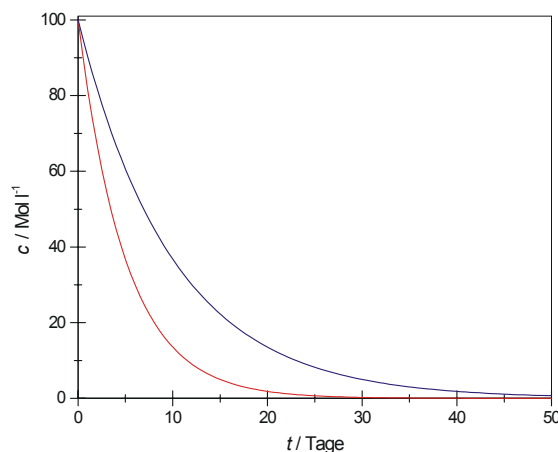


Abb. 13 Funktionsgraph für die Zerfallsgleichung in linearer Abtragung

Umfasst der Messwertevorrat mehrere Zehnerpotenzen ist in jedem Fall die logarithmische Auftragung vorzuziehen. Durch diese Koordinatentransformation erhalten wir:

$$\ln \frac{c}{c_0} = -k t$$

$$\ln c = -k t + \ln c_0$$

Dies sind typische Geradengleichungen, wir haben dadurch unsere Exponentialfunktion also graphisch **linearisiert!**

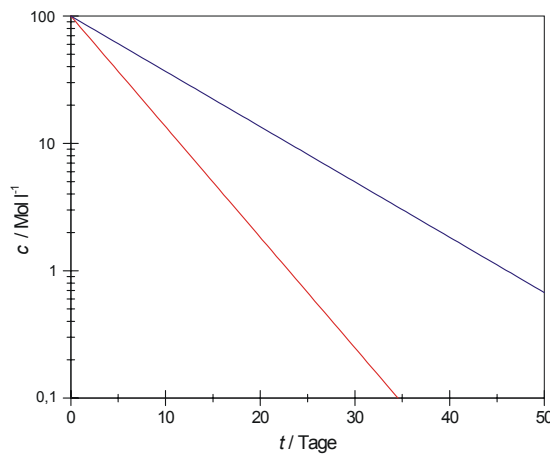
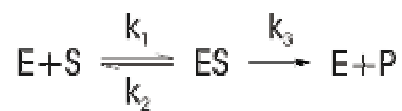


Abb. 14 Funktionsgraph für die Zerfallsgleichung in logarithmischer Abtragung

Die Michaelis-Menten Gleichung

Die Michaelis-Menten Gleichung beschreibt die Kinetik einer enzymkatalysierten Reaktion, die dem vereinfachten Reaktionsschema



folgt. Dabei ergibt sich für die Abhängigkeit der Anfangsgeschwindigkeiten v_0 der Reaktion von der Substratkonzentration $[S]$ nach:

$$v_0 = \frac{V_{\max} [S]}{k_m + [S]}$$

V_{\max} : Maximale Geschwindigkeit, wenn das Enzym mit Substrat gesättigt ist.

k_m : Dissoziationskonstante des Enzym-Substrat Komplexes. Michaelis-Konstante = Substratkonzentration $[S]$ (mol l^{-1}) bei der Reaktionsgeschwindigkeit $v_0 = 1/2 V_{\max}$.

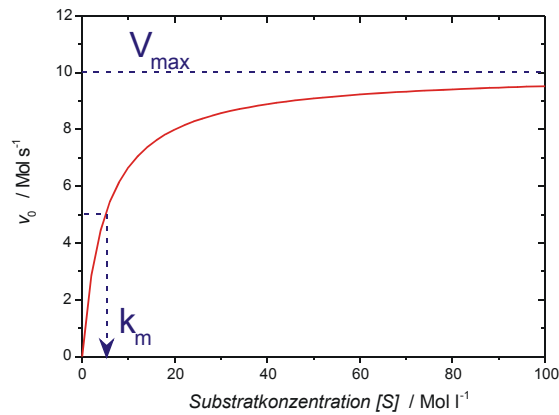


Abb. 15 Funktionsgraph der Michaelis-Menten Gleichung

Lineweaver-Burke Abtragung

Inversion der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} &\rightarrow f\left(\frac{1}{[S]}\right) \\ \frac{1}{V} &= \frac{k_m + [S]}{V_{\text{max}} [S]} && \text{Lineweaver-Burke} \\ &= \frac{k_m}{V_{\text{max}} [S]} + \frac{1}{V_{\text{max}}} \end{aligned}$$

Multiplikation mit $[S]$:

$$\begin{aligned} \frac{[S]}{V} &\rightarrow f([S]) \\ \frac{[S]}{V} &= \frac{k_m}{V_{\text{max}}} + \frac{[S]}{V_{\text{max}}} \end{aligned}$$

Division der Lineweaver-Burke Gleichung durch $[S]$:

$$\frac{V}{[S]} \rightarrow f(V)$$

$$\frac{1}{V [S]} = \frac{k_m}{V_{\max} [S] [S]} + \frac{1}{V_{\max} [S]}$$

$$\frac{1}{[S]} = \frac{V}{[S]} \frac{k_m}{V_{\max} [S]} + \frac{V}{V_{\max} [S]}$$

$$\frac{1}{[S]} - \frac{V}{V_{\max} [S]} = \frac{V}{[S]} \frac{k_m}{V_{\max} [S]}$$

$$\frac{V_{\max} [S]}{k_m [S]} - \frac{V_{\max} [S]}{V_{\max} [S]} \frac{V}{k_m} = \frac{V}{[S]}$$

$$\frac{V}{[S]} = \frac{V_{\max}}{k_m} - \frac{V}{k_m}$$

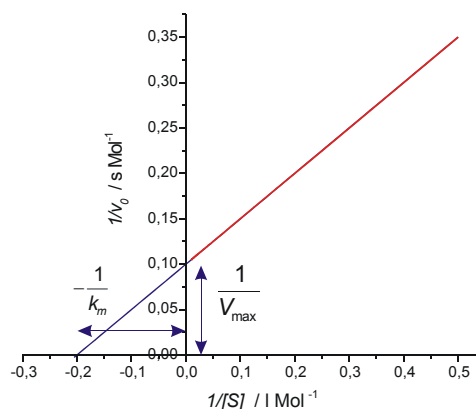


Abb. 16 Michaelis-Menten Gleichung in der Lineweaver Burke Abtragung.

Sigmoide

Eine weitere in der Biologie sehr häufig anzutreffende Gruppe von Funktionen sind die sog. *Sigmoiden*. Beispiele hierfür sind die Boltzmann-Funktion

$$y = a \frac{1}{1 + e^{c(x-b)}}$$

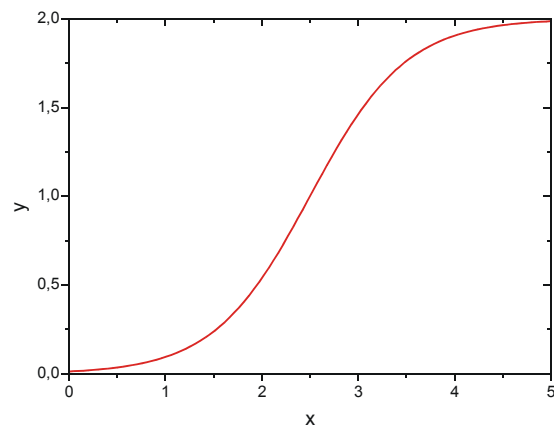


Abb. 17 Boltzmann-Funktion.

oder die Hill-Gleichung

$$y = a \frac{x^n}{b^n + x^n}$$

die man z.B. zur Beschreibung von Dosis-Wirkungs Kurven in der Pharmakologie oder für Protonierungsreaktionen bei Enzymen verwendet.

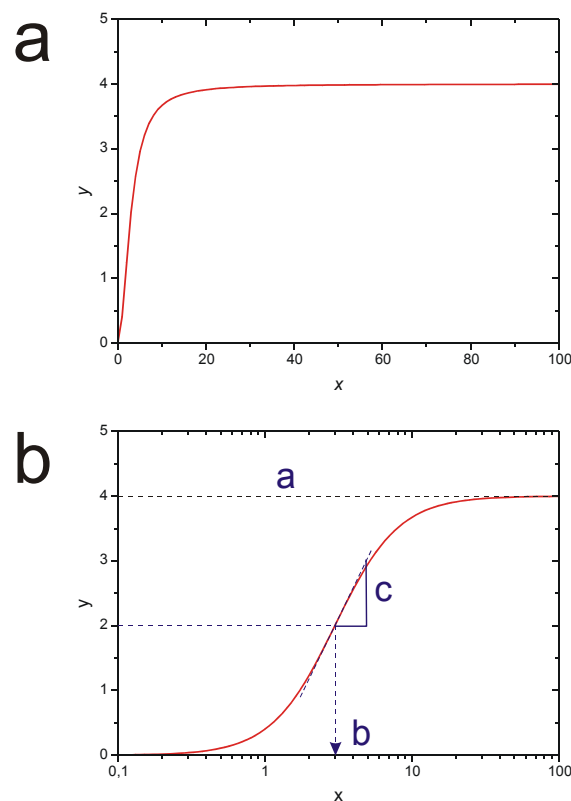


Abb. 18 Hill-Kurve.

Beide Funktionen besitzen drei charakteristische Parameter: Den Maximalwert a , die Lage des Wendepunktes b , und einen weiteren Parameter c , der direkt oder indirekt die Steilheit der Funktion am Wendepunkt beeinflusst.

Größen und Einheiten

Jede Wissenschaft erfordert eine klar definierte Fachsprache, die eindeutige und allgemeinverständliche Aussagen zulässt. Damit soll keinesfalls einem „Wissenschaftschinesisch“ eingeführt werden, in dem sich nur wenige Auserwählte untereinander verständigen können, sondern es muss vielmehr sichergestellt werden, dass mit den verwendeten Begriffen auch jeder denselben Inhalt verbindet. Wir müssen in der Wissenschaft subjektive Begriffe vermeiden und uns auf exakt definierte Begriffe beschränken. Gerade die exakten Naturwissenschaften zeichnen sich durch eine international vereinbarte Abmachung aus, in der die wichtigsten Größen und Einheiten definiert worden sind, dem [Système International d'Unités: SI-Einheiten](#).

Eine Überprüfung einer wissenschaftlichen Aussage durch ein Experiment ist nur dann möglich, wenn jedermann unter den verwendeten Begriffen auch identische Inhalte versteht.

Das SI-Einheitensystem

Die Basisgrößen sind definiert durch ein körperliches Normal (Prototyp oder Standard) oder durch ein Grundmessverfahren. Alle anderen Größen sind abgeleitete Größen, die durch Definitionsgleichungen aus den Basisgrößen abgeleitet werden. Werden sie ohne zusätzliche Zahlenfaktoren gebildet, dann spricht man von kohärent abgeleiteten SI-Einheiten, ansonsten von nicht kohärenten Einheiten.

Basisgröße	Basiseinheit
Länge	m (Meter)
Zeit	s (Sekunde)
Masse	kg (Kilogramm)
Stoffmenge	mol (Mol)
el. Stromstärke	A (Ämpere)
thermodynamische Temperatur	K (Kelvin)
Lichtstärke	cd (Candela)

Näheres zu den SI-Einheiten finden Sie bei der [Physikalischen Technischen Bundesanstalt \(aka Eichamt\)](#):

Größen werden in Rechnungen durch Symbole abgekürzt:

$v, l, t, t_{1/2}, t_{lag}, v_{max}$

Mit Größen kann man durch die Anwendung üblicher mathematischer Regeln rechnen. Man muss beachten, dass eine Größe nicht als Exponent erscheinen darf und dass man Größen nicht logarithmieren kann.

$$v = \frac{ds}{dt} \quad b = \frac{dv}{dt} \quad dv = b dt \quad v = b t$$

$$ds = b t dt \quad s = \frac{1}{2} b t^2 \quad b = \frac{2 s}{t^2}$$

Einheiten werden durch Symbole angegeben, Bruchteile und Vielfache mit durch 3 teilbaren Exponenten gebildet.

Vorsilben und Zehnerpotenzen

T	Tera	10^{12}	1.000.000.000.000
---	------	-----------	-------------------

G	Giga	10^9	1.000.000.000
M	Mega	10^6	1.000.000
k	Kilo	10^3	1.000
h	Hekto	10^2	100
D	Deka	10^1	10
		10^0	1
d	Dezi	10^{-1}	0,1
c	Zenti	10^{-2}	0,01
m	Mili	10^{-3}	0,001
μ	Mikro	10^{-6}	0,000.001
n	Nano	10^{-9}	0,000.000.001
p	Pico	10^{-12}	0,000.000.000.001
f	Femto	10^{-15}	0,000.000.000.000.001

Mit Einheiten kann man durch Anwendung üblicher mathematischer Regel rechnen; eine Größengleichung darf aber nicht von den gewählten Einheiten abhängig sein:

$$\text{Größe} = \text{Zahl} \times \text{Einheit}$$

$$\text{m} \times \text{m} = \text{m}^2$$

$$\frac{\text{km}}{\text{m}} = 1000$$

Literatur

1. Taschenbuch der Mathematik.
I. Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig:
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1998.
2. DIN 461. Graphische Darstellung in Koordinatensystemen.
[Deutsches Institut für Normung e. V.](#)
3. DIN 1304. Allgemeine Formelzeichen.
[Deutsches Institut für Normung e. V.](#)

Links

- [Physikalisch-technische Bundesanstalt](#)
- [MuPad Computeralgebrasystem \(Frei für Studenten\)](#)